BILANGAN BERPANGKAT DAN BENTUK AKAR

PERTEMUAN 1

**Pengertian Bilangan Berpangkat**

Dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam bidang ilmu pengetahuan, diperlukan cara penulisan yang lebih sederhana untuk bilangan yang relative besar maupun relative kecil. Misalnya :

- Jarak antara matahari dan neptunus dalam system tata surya kita adalah 4.500.000.000 km.
- Dalam 18 gram air terdapat jumlah molekul sebanyak 602.000.000.000.000.000.000.000.

Bilangan-bilangan tersebut dapat disederhanakan penulisannya dengan cara berikut :

- 4.500.000.000 km dapat dinyatakan dalam bentuk $4,5 \times 10^9$ km.
- 602.000.000.000.000.000.000.000 dapat dinyatakan dalam bentuk $6,02 \times 10^{23}$.

Cara penulisan bilangan dengan menggunakan bilangan berpangkat seperti di atas, dipopulerkan oleh seorang matematikawan dari Negara Perancis yang bernama *Rene Descartes* (1596 – 1650).

Perhatikan perkalian-perkalian bilangan berikut :

- $13 \times 13 \times 13$ dapat disederhanakan penulisannya menjadi $13^3$.
- $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$ dapat disederhanakan penulisannya menjadi $(-3)^4$.
- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ dapat disederhanakan penulisannya menjadi $(\frac{1}{2})^6$

Uraian di atas menunjukkan bahwa *perkalian berulang dengan bilangan pokok yang sama* dapat dinyatakan dalam bentuk bilangan berpangkat, dimana pangkat atau eksponennya menunjukkan banyaknya bilangan yang dikalikan.

Dengan demikian untuk sembarang bilangan bulat a, pemangkatan bilangan seperti di atas dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$a^1 = a$$

$$a^2 = \underbrace{a \times a}_{\text{2 faktor}}$$

$$a^3 = \underbrace{a \times a \times a}_{\text{3 faktor}}$$

$$a^4 = \underbrace{a \times a \times a \times a}_{\text{4 faktor}}$$

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan hal berikut :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n faktor}}$$

a disebut bilangan pokok
n disebut pangkat (eksponen)

Untuk sembarang bilangan $a^n$ dengan n bilangan bulat positif berlaku :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{n faktor}}$$

Untuk bilangan $a^n$ dengan n bilangan bulat positif, $a^n$ disebut **bilangan berpangkat sebenarnya.**

**Bilangan Berpangkat Nol**

Perhatikan contoh berikut :

1. $\frac{6^3}{6^3} = \frac{6.6.6}{6.6.6} = 6^0 = 1$
2. $\frac{(-3)^5}{(-3)^5} = \frac{(-3).(-3).(-3).(-3).(-3)}{(-3).(-3).(-3).(-3).(-3} = (-3)^0 = 1$

   Berdasarkan 2 contoh di atas, diperoleh hubungan berikut :

   $\left.\begin{array}{l} 6^3 : 6^3 = 6^0 \\ 6^3 : 6^3 = 1 \end{array}\right\}$ Maka $6^0 = 1$

   $\left.\begin{array}{l} (-3)^5 : (-3)^5 = (-3)^0 \\ (-3)^5 : (-3)^5 = 1 \end{array}\right\}$ Maka $(-3)^0 = 1$

Untuk bilangan berpangkat nol dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Untuk sembarang bilangan bulat a dengan $a \neq 0$, selalu berlaku **$a^0 = 1$.** $a^0$ merupakan **bilangan berpangkat tak sebenarnya**.
2. Untuk a = 0, maka $a^0$ tidak terdefenisikan. Dengan demikian **$a^0$ tidak terdefenisikan.**

**Bilangan Berpangkat Negatif**

Berdasarkan 2 contoh pada bilangan berpangkat nol, maka untuk bilangan berpangkat negatif dapat disimpulkan sebagai berikut :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

dengan $a \neq 0$, bilangan $a^{-n}$ dengan n bilangan bulat positif merupakan **bilangan berpangkat tak sebenarnya**

PERTEMUAN 2

**Sifat-Sifat Pada Perpangkatan**

**Perkalian Pada Perpangkatan**

Perhatikan contoh :

1. $3^2$ x $3^3$ = (3 x 3) x (3 x 3 x 3) = $3^5$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 x \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2} x \frac{1}{2}\right) x \left(\frac{1}{2} x \frac{1}{2} x \frac{1}{2} x \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

Secara umum didapat : $a^m$ x $a^n$ = $a^{m+n}$

**Pembagian Pada Perpangkatan**

Perhatikan contoh :

1. $\frac{3^7}{3^4} = \frac{3x3x3x3x3x3x3}{3x3x3x3} = 3^3$
2. $\frac{(-2)^6}{(-2)^3} = \frac{(-2)x(-2)x(-2)x(-2)x(-2)x(-2)}{(-2)x(-2)x(-2)} = (-2)^3$

Secara umum didapat :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

**Pemangkatan Pada Perpangkatan**

Perhatikan contoh :

1. $(4^2)^3$ = $4^2$ x $4^2$ x $4^2$ = (4 x 4) x (4 x 4) x (4 x4) = $4^6$
2. $(3^2)^3$ = $(3)^2$ x $(3)^2$ x $(3)^2$ = (3 x 3) x (3 x 3) x (3 x 3) = $3^6$

Secara umum didapat : $(a^m)^n$ = $a^{m.n}$

Contoh Soal dan pembahasan :

1. Tentukan hasil perkalian bilangan berpangkat berikut : $9^{-5}$ x $9^6$ x $9^{-4}$

2. Tentukan hasil operasi bilangan berpangkat berikut : $4^{-5}$ x $4^7$ : $4^{-2}$

3. Tentukan hasil pemangkatan berikut : $(4a^2)^3$

Penyelesaian :

1. $9^{-5}$ x $9^6$ x $9^{-4}$ = $9^{-5+6+(-4)}$ = $9^{-3}$ = $\frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$
2. $4^{-5}$ x $4^7$ : $4^{-2}$ = $4^{-5+7-(-2)}$ = $4^4$ = 4 x 4 x 4 x 4 = 256
3. $(4a^2)^3$ = $4^{1x3}$ x $a^{2x3}$ = $4^3$ x $a^6$ = $64a^6$

PERTEMUAN 3

**Pengertian Akar Bilangan**

Mencari nilai $\sqrt[n]{\ }$ dari bilangan a, pada dasarnya adalah mencari suatu bilangan yang jika dipangkatkan n akan menghasilkan a.

**Dengan demikian, akar kuadrat suatu bilangan merupakan operasi kebalikan atau invers dari kuadrat (pangkat 2).**

Perhatikan uraian berikut :

a = $\sqrt{a^2}$

= $\sqrt{a\ x\ a}$

= $\sqrt{a}\ x\ \sqrt{a}$

Jadi, $\sqrt{a}$ x $\sqrt{a}$ = $a^{\frac{1}{2}}$ x $a^{\frac{1}{2}}$ dan $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Untuk sembarang bilangan a dengan a ≠ 0 berlaku :

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\ dengan\ a\ \neq 0$$

**Operasi Akar Bilangan**

Pada operasi penjumlahan dan pengurangan, yang dapat disederhanakan adalah akar-akar yang memiliki pangkat akar yang sama dan bilangan di bawah tanda akar juga sama

Pada operasi perkalian dan pembagian, yang dapat disederhanakan adalah akar bilangan yang senama.

Contoh soal dan pembahasan :

1. Tentukan bentuk sederhana dari $\sqrt[4]{8b^8}$
2. Sederhanakan bentuk $\sqrt{20}$
3. Tentukan hasil operasi dari 9$\sqrt{3}$ + $\sqrt{3}$
4. Tentukan hasil operasi dari $\sqrt{240}$ : $\sqrt{5}$

Penyelesaian :

1. $\sqrt[4]{8b^8}$ = $\sqrt[4]{2^3b^8}$
   = $2^{\frac{3}{4}}b^{\frac{8}{4}}$ = $2^{\frac{3}{4}}b^2$
2. $\sqrt{20} = \sqrt{4x5}$ = $\sqrt{4x}\sqrt{5}$ =2$\sqrt{5}$
3. 9$\sqrt{3}$ + $\sqrt{3}$ $= 10\sqrt{3}$
4. $\sqrt{240}$ : $\sqrt{5} = \sqrt{48} = \sqrt{16x}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

PERTEMUAN 4

**Merasionalkan Bentuk Akar Kuadrat**

**Merasionalkan Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$**

Untuk merasionalkan penyebut pecahan $\frac{a}{\sqrt{b}}$ dilakukan dengan langkah berikut :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} x \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$$

**Merasionalkan bentuk $\frac{a}{a+\sqrt{b}}$ dan $\frac{a}{a-\sqrt{b}}$**

Untuk merasionalkan penyebut pecahan $\frac{1}{a+\sqrt{b}}$ dan $\frac{1}{a-\sqrt{b}}$ dilakukan dengan langkah berikut :

- $\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{1}{a+\sqrt{b}} x \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$
- $\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{1}{a+\sqrt{b}} x \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$

**Merasionalkan Bentuk $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ dan $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$**

Untuk merasionalkan penyebut pecahan $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ dan $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ dilakukan dengan langkah berikut :

- $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} x \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$
- $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} x \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

Contoh soal dan pembahasan :

1. Rasionalkan bentuk dari $\frac{6}{\sqrt{3}}$
2. Rasionalkan bentuk dari $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$
3. Rasionalkan bentuk dari $\frac{3}{3+\sqrt{2}}$
4. Rasionalkan bentuk dari $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Penyelesaian :

1. $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} x \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} x \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{2x5} = \frac{\sqrt{15}}{10}$

3. $\frac{3}{3+\sqrt{2}} = \frac{3}{3+\sqrt{2}} x \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{3(3-\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{9-3\sqrt{2}}{9-2} = \frac{9-3\sqrt{2}}{7}$

4. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} x \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{15}+3}{2}$